



TITLE:

ワイル群対称性をもつ q -超幾何
級数の無限積表示について
(Painleve系, 超幾何系, 漸近解析)

AUTHOR(S):

伊藤, 雅彦

CITATION:

伊藤, 雅彦. ワイル群対称性をもつ q -超幾何級数の無限積表示について (Painleve系, 超幾何系, 漸近解析). 数理解析研究所講究録 2000, 1133: 1-7

ISSUE DATE:

2000-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/63741>

RIGHT:

ワイル群対称性をもつ q -超幾何級数の無限積表示について

名大・多元数理 伊藤 雅彦 (Masahiko ITO)

ルート系 F_4 のワイル群に関する対称性を持った q -超幾何級数で Jacobi の楕円関数の積で表示されるもの (定理 4.1, 定理 4.4) を見つけたので報告します。以下、 $|q| < 1$ とし、記号

$$(a)_\infty := \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 - aq^\nu), \quad (a)_\nu := (a)_\infty / (aq^\nu)_\infty, \quad \vartheta(x) := (x)_\infty (q/x)_\infty (q)_\infty$$

を使います。

1 q -超幾何級数 ${}_n\psi_n$ ([GR] 参照)

命題 1.1 (Ramanujan's ${}_1\psi_1$ summation formula) $|b/a| < |z| < 1$ のとき、次が成立：

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_\nu}{(b)_\nu} z^\nu = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty} \frac{(q)_\infty}{(b)_\infty} \frac{(b/a)_\infty}{(q/a)_\infty} \frac{(q/az)_\infty}{(b/az)_\infty}.$$

上の公式が ${}_1\psi_1$ と呼ばれるのは、一般に q -超幾何級数 ${}_n\psi_n$ が次のように定義されるからです：

$${}_n\psi_n \left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_n \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_n \end{matrix} ; q; z \right) := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{(a_1)_\nu (a_2)_\nu \dots (a_n)_\nu}{(b_1)_\nu (b_2)_\nu \dots (b_n)_\nu} z^\nu,$$

$|b_1 \dots b_n / a_1 \dots a_n| < |z| < 1$ で収束。

よく研究されている ${}_n\psi_n$ に well-poised と very-well-poised という概念があります ('poised' は英和辞典で引くと '釣り合った' の意)。それぞれ定義は、

$$\text{well-poised} : a_1 b_1 = a_2 b_2 = \dots = a_n b_n,$$

$$\text{very-well-poised} : a_1 = -a_2 = qb_1 = -qb_2 \quad \& \quad \text{well-poised}$$

です。very-well-poised ${}_n\psi_n$ において有名な公式に、Bailey の very-well-poised ${}_6\psi_6$ 公式があります。

命題 1.2 (Bailey 1936) $|qa^2/bcde| < 1$ のとき、次が成立：

$${}_6\psi_6 \left(\begin{matrix} qa^{\frac{1}{2}}, & -qa^{\frac{1}{2}}, & b, & c, & d, & e \\ a^{\frac{1}{2}}, & -a^{\frac{1}{2}}, & aq/b, & aq/c, & aq/d, & aq/e \end{matrix} ; q; \frac{aq^2}{bcde} \right) \\ = \frac{(q/a)_\infty (aq)_\infty (aq/bc)_\infty (aq/bd)_\infty (aq/be)_\infty (aq/cd)_\infty (aq/ce)_\infty (aq/de)_\infty (q)_\infty}{(q/b)_\infty (q/c)_\infty (q/d)_\infty (q/e)_\infty (aq/b)_\infty (aq/c)_\infty (aq/d)_\infty (aq/e)_\infty (a^2 q/bcde)_\infty}.$$

これらの公式をルート系のワイル群の対称性を使って多重和に拡張します (後の定義 (5.1) でわかるように、Bailey の very-well-poised ${}_6\psi_6$ 公式は BC_1 型と見なせる (注意 5.2))。

2 ワイル群対称性を持つ q -超幾何級数

E : n 次元実ベクトル空間、

R : E を張る irreducible reduced ルート系、

R^+ : R の基底 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に対する正ルート全体 ($\alpha \in R^+$ を $\alpha > 0$ と書く)、

W : R のワイル群

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: E 上の R のワイル群 W に関する正定値内積、

P : コウエイト格子 $P = \{\chi \in E; \langle \alpha, \chi \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for any } \alpha \in R\}$ 、

Q : フルート格子 $Q = \mathbb{Z}\alpha_1^\vee + \dots + \mathbb{Z}\alpha_n^\vee \subset P$. ただし $\alpha^\vee = 2\alpha/\langle \alpha, \alpha \rangle$.

L : 任意の rank n の P の部分格子、

とします。内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^n$ 上線形に拡張されます。 $x \in E_{\mathbb{C}}$ に対して次の関数 $\Phi_R(\beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_l; x)$ を定義します。

$$\begin{aligned} \Phi_R(\beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_l; x) &= \Phi_R(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}; x) \\ &= \prod_{i=1}^s \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha: \text{short}}} q^{(\frac{1}{2} - \beta_i)\langle \alpha, x \rangle} \frac{(q^{1 - \beta_i + \langle \alpha, x \rangle})_{\infty}}{(q^{\beta_i + \langle \alpha, x \rangle})_{\infty}} \cdot \prod_{j=1}^l \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha: \text{long}}} q^{(\frac{1}{2} - \gamma_j)\langle \alpha, x \rangle} \frac{(q^{1 - \gamma_j + \langle \alpha, x \rangle}; q_{\alpha})_{\infty}}{(q^{\gamma_j + \langle \alpha, x \rangle}; q_{\alpha})_{\infty}} \end{aligned}$$

ただし $s, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\beta_i, \gamma_j \in \mathbb{C}$. すべてのルート $\alpha \in R$ が同じ長さのとき、それらはすべて短ルートと見なします。また、 $\Delta_R(x)$ を ‘Weyl の分母’

$$\Delta_R(x) := \prod_{\alpha > 0} (q^{\frac{1}{2}\langle \alpha, x \rangle} - q^{-\frac{1}{2}\langle \alpha, x \rangle}).$$

とします。 $E_{\mathbb{C}}$ 上の関数 $F(x)$ に対して、ワイル群の作用を $wF(x) := F(w^{-1}x)$, $w \in W$ で定めると、関数 $\Phi_R(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}; x)$ と $\Delta_R(x)$ はそれぞれ W に関して次の対称性を持ちます：

$$w\Phi_R(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}; x) = U_w(x) \cdot \Phi_R(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}; x), \quad w \in W$$

$$w\Delta_R(x) = (-1)^w \Delta_R(x).$$

ただし

$$U_w(x) = \prod_{i=1}^s \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ w\alpha < 0 \\ \alpha: \text{short}}} q^{(2\beta_i - 1)\langle \alpha, x \rangle} \frac{\vartheta(q^{\beta_i + \langle \alpha, x \rangle})}{\vartheta(q^{1 - \beta_i + \langle \alpha, x \rangle})} \cdot \prod_{j=1}^l \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ w\alpha < 0 \\ \alpha: \text{long}}} q^{(2\gamma_j - 1)\langle \alpha, x \rangle} \frac{\vartheta(q^{\gamma_j + \langle \alpha, x \rangle})}{\vartheta(q^{1 - \gamma_j + \langle \alpha, x \rangle})}.$$

$U_w(x)$ はシフト $x \rightarrow x + \chi$, $\chi \in L$ に関して不変な関数で、 $q \rightarrow 1$ の極限で $U_w(x) \rightarrow 1$ になります。さて、 $z \in E_{\mathbb{C}}$ に対して、格子 L 上の無限和

$$J_R(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}; L; z) := \sum_{\chi \in L} \Phi_R(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}; z + \chi) \Delta_R(z + \chi).$$

を ‘ワイル群対称性を持つ q -超幾何級数’ と呼ぶことにします。

3 例

ワイル群対称性を持つ q -超幾何級数 $J_R(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}; L; z)$ の例をいくつか紹介します。

3.1 A_n 型

基底: $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \alpha_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1},$

正ルート: $\varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum_{i \leq k < j} \alpha_k \quad (1 \leq i < j \leq n+1),$

コウエイト格子: $P = \mathbf{Z}\chi_1 + \mathbf{Z}\chi_2 + \mathbf{Z}\chi_3 + \dots + \mathbf{Z}\chi_n, \quad \langle \alpha_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}.$

コルート格子:

$$Q = \mathbf{Z}\alpha_1 + \mathbf{Z}\alpha_2 + \mathbf{Z}\alpha_3 + \dots + \mathbf{Z}\alpha_n, \quad \left(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \right)_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

sum	type
$J_{A_n}(\beta_1; P; z)$	Aomoto's A_n -type [p.132 Ito1]
$J_{A_n}(\beta_1; Q; z)$	

3.2 B_n 型

基底: $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n = \varepsilon_n,$

正短ルート: $\varepsilon_i \quad (1 \leq i \leq n),$ 正長ルート: $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leq i < j \leq n),$

コウエイト格子:

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \mathbf{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \dots + \mathbf{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n) \\ &= \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}\varepsilon_2 + \mathbf{Z}\varepsilon_3 + \dots + \mathbf{Z}\varepsilon_n. \end{aligned}$$

sum	type
$J_{B_n}(\beta_1, \gamma_1; P; z)$	Aomoto's B_n -type [Ao]
$J_{B_n}(\{\beta_i\}_{i=1}^{2n-1}; P; z)$	Gustafson's B_n -type [Gu1]

3.3 C_n 型

基底: $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n = 2\varepsilon_n,$

正短ルート: $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leq i < j \leq n),$ 正長ルート: $2\varepsilon_i \quad (1 \leq i \leq n),$

コウエイト格子:

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \mathbf{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \dots + \mathbf{Z}\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n}{2}\right) \\ &= \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}\varepsilon_2 + \dots + \mathbf{Z}\varepsilon_{n-1} + \mathbf{Z}\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n}{2}\right), \end{aligned}$$

コルート格子:

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{Z}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \mathbf{Z}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \dots + \mathbf{Z}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + \mathbf{Z}\varepsilon_n \\ &= \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}\varepsilon_2 + \mathbf{Z}\varepsilon_3 + \dots + \mathbf{Z}\varepsilon_n. \end{aligned}$$

sum	type
$J_{C_n}(\beta_1, \gamma_1; P; z)$	Aomoto's C_n -type [p.122 (3.5) Ao]
$J_{C_n}(\beta_1, \gamma_1; Q; z)$	

3.4 D_n 型

基底: $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n,$

正ルート: $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($1 \leq i < j \leq n$),

コウエイト格子:

$$\begin{aligned} P = & \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \mathbf{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \dots + \mathbf{Z}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-2}) \\ & + \mathbf{Z}\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n}{2}\right) + \mathbf{Z}\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n}{2}\right) \\ & - \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}\varepsilon_2 + \dots + \mathbf{Z}\varepsilon_{n-1} + \mathbf{Z}\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n}{2}\right), \end{aligned}$$

コルート格子: $Q = \mathbf{Z}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \mathbf{Z}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \dots + \mathbf{Z}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + \mathbf{Z}(\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n) \subset P,$

部分格子: $L = \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}\varepsilon_2 + \mathbf{Z}\varepsilon_3 + \dots + \mathbf{Z}\varepsilon_n \subset P.$

sum	type
$J_{D_n}(\beta_1; P; z)$	Aomoto's D_n -type [p.122 (3.6) Ao]
$J_{D_n}(\beta_1; Q; z)$	
$J_{D_n}(\beta_1; L; z)$	

3.5 G_2 型

基底: $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$

正短ルート: $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2,$ 正長ルート: $\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2,$

コウエイト格子: $P = Q = \mathbf{Z}\chi_1 + \mathbf{Z}\chi_2, \langle \alpha_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}.$

sum	type
$J_{G_2}(\beta_1, \gamma_1; P; z)$	Aomoto's G_2 -type [p.152 Ito1]
$J_{G_2}(\{\beta_i\}_{i=1}^4; P; z)$	Gustafson's G_2 -type [p.103 (8.12) Gu1]

3.6 F_4 型

ルート系 F_4 と F_4^\vee は直交変換で移り合うので、 F_4^\vee を使う。

基底: $\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \alpha_3 = 2\varepsilon_4, \alpha_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4,$

正短ルート: $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($1 \leq i < j \leq 4$), 正長ルート: $2\varepsilon_i$ ($1 \leq i \leq 4$), $\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$

コウエイト格子:

$$\begin{aligned} P = Q = & \mathbf{Z}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \mathbf{Z}(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) + \mathbf{Z}\varepsilon_4 + \mathbf{Z}\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4}{2}\right) \\ = & \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}\varepsilon_2 + \mathbf{Z}\varepsilon_3 + \mathbf{Z}\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4}{2}\right) \end{aligned}$$

部分格子: $L = \mathbf{Z}\varepsilon_1 + \mathbf{Z}\varepsilon_2 + \mathbf{Z}\varepsilon_3 + \mathbf{Z}\varepsilon_4 \subset P$

sum	type
$J_{F_4}(\beta_1, \gamma_1; P; z)$	Aomoto's F_4 -type [Ao]
$J_{F_4}(\{\beta_i\}_{i=1}^3; P; z)$	[Ito4]
$J_{F_4}(\{\beta_i\}_{i=1}^3; L; z)$	

4 積公式

無限級数 $J_R(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}; L; z)$ が Jacobi の楕円テータ関数 $\vartheta(x)$ の積になる場合がパラメータの数 (s, l) で分類できます。

定理 4.1 ([Ito3]) 格子 $L \subset P$ に対して、無限級数 $J_R(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}; L; z)$ が

$$C_R(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}; L) \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha: \text{short}}} \frac{q^{\left(\frac{s-1}{2} - \sum_{i=1}^s \beta_i \langle \alpha, z \rangle\right)} \vartheta(q^{\langle \alpha, z \rangle})}{\prod_{i=1}^s \vartheta(q^{\beta_i + \langle \alpha, z \rangle})} \cdot \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha: \text{long}}} \frac{q^{\left(\frac{l-1}{2} - \sum_{j=1}^l \gamma_j \langle \alpha, z \rangle\right)} \vartheta(q^{\langle \alpha, z \rangle})}{\prod_{j=1}^l \vartheta(q^{\gamma_j + \langle \alpha, z \rangle})} \quad (4.1)$$

の積表示を持つのは、以下のとき、またそのときに限る：

- A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 型のとき、 $s = 1$ 、
- B_n 型のとき、 $(s, l) = (1, 1)$ or $(2n - 1, 0)$ 、
- C_n 型のとき、 $(s, l) = (1, 1)$ or $(0, \frac{n+1}{2})$ n : 奇数、
- G_2 型のとき、 $(s, l) = (1, 1)$ or $(4, 0)$ 、
- F_4 型のとき、 $(s, l) = (1, 1)$ or $(3, 0)$ 。

ただし $C_R(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}; L)$ は $z \in E_{\mathbb{C}}$ によらない定数。

注意 4.2 上の分類で一般のルート系 R で $(s, l) = (1, 1)$ のときは Aomoto [Ao] により定義が与えられ、定数 $C_R(\beta_1, \gamma_1; L)$ ($L = P$ or Q) の値が知られている [Ito1, Ma2]。

注意 4.3 B_n 型で $(s, l) = (2n - 1, 0)$ のときと、 G_2 型で $(s, l) = (4, 0)$ のときは Gustafson により研究されており定数 $C_R(\{\beta_i\}; P)$ の値が知られている [Gu1]。

特に、 F_4 型で $(s, l) = (3, 0)$ のとき、定数 $C_{F_4}(\beta_1, \beta_2, \beta_3; P)$ の具体形は次のようになります。

定理 4.4 ([Ito4]) 無限級数 $J_{F_4}(\beta_1, \beta_2, \beta_3; L; z)$ は、 $|q| < |q^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}|^6$ のとき収束し、(4.1) の積表示を持つ。定数 $C_{F_4}(\beta_1, \beta_2, \beta_3; P)$ は次のようになる：

$$\begin{aligned} C_{F_4}(\beta_1, \beta_2, \beta_3; P) &= (q)_{\infty}^4 (q^{1-\beta_1-\beta_2})_{\infty} (q^{1-\beta_2-\beta_3})_{\infty} (q^{1-\beta_1-\beta_3})_{\infty} \\ &\quad (q^{1-\beta_1-2\beta_2})_{\infty} (q^{1-\beta_1-2\beta_3})_{\infty} (q^{1-\beta_2-2\beta_1})_{\infty} (q^{1-\beta_2-2\beta_3})_{\infty} (q^{1-\beta_3-2\beta_1})_{\infty} (q^{1-\beta_3-2\beta_2})_{\infty} \\ &\quad (q^{1-\beta_1-\beta_2-\beta_3})_{\infty} (q^{1-\beta_1-\beta_2-2\beta_3})_{\infty} (q^{1-\beta_1-2\beta_2-\beta_3})_{\infty} (q^{1-2\beta_1-\beta_2-\beta_3})_{\infty} \\ &\quad (q^{1-\beta_1-2\beta_2-2\beta_3})_{\infty} (q^{1-2\beta_1-\beta_2-2\beta_3})_{\infty} (q^{1-2\beta_1-2\beta_2-\beta_3})_{\infty} (q^{1-2\beta_1-2\beta_2-2\beta_3})_{\infty} \\ &\quad \frac{(q^{1-3\beta_1-3\beta_2-3\beta_3})_{\infty}}{(q^{1-6\beta_1-6\beta_2-6\beta_3})_{\infty}} \prod_{i=1}^3 \frac{(q^{1-2\beta_i})_{\infty}}{(q^{1-\beta_i})_{\infty}} \frac{(q^{1-3\beta_i})_{\infty}}{(q^{1-\beta_i})_{\infty}}. \end{aligned}$$

5 non reduced な場合

ルート系が non reduced irreducible の場合 (BC_n 型の場合) も同様の積公式を考察します。まず関数 $\Phi_{BC_n}(\beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_m, \delta_1, \dots, \delta_l; x)$ を定義します：

$$\begin{aligned}
& \Phi_{BC_n}(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}, \{\delta_k\}; x) \\
&:= \prod_{i=1}^s \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha: \text{short}}} q^{\langle \frac{1}{2} - \beta_i \rangle \langle \alpha, x \rangle} \frac{(q^{1-\beta_i+\langle \alpha, x \rangle})_\infty}{(q^{\beta_i+\langle \alpha, x \rangle})_\infty} \cdot \prod_{j=1}^m \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha: \text{middle}}} q^{\langle \frac{1}{2} - \gamma_j \rangle \langle \alpha, x \rangle} \frac{(q^{1-\gamma_j+\langle \alpha, x \rangle}; q_\alpha)_\infty}{(q^{\gamma_j+\langle \alpha, x \rangle}; q_\alpha)_\infty} \\
&\quad \cdot \prod_{k=1}^l \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha: \text{long}}} q^{\langle \frac{1}{2} - \delta_k \rangle \langle \alpha, x \rangle} \frac{(q^{1-\delta_k+\langle \alpha, x \rangle}; q_\alpha)_\infty}{(q^{\delta_k+\langle \alpha, x \rangle}; q_\alpha)_\infty}.
\end{aligned}$$

ただし $s, m, l \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, $\beta_i, \gamma_j, \delta_k \in \mathbf{C}$ 。ここで、 C_n 型の分母 $\Delta_{C_n}(x)$ と C_n 型の コウエイト格子 P の rank n の部分格子 L を使って、 BC_n 型の q -超幾何級数 $J_{BC_n}(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}, \{\delta_k\}; L; z)$ を次のように定義します：

$$J_{BC_n}(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}, \{\delta_k\}; L; z) := \sum_{\chi \in L} \Phi_{BC_n}(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}, \{\delta_k\}; z + \chi) \Delta_{C_n}(z + \chi). \quad (5.1)$$

分類は次のようになります。

定理 5.1 ([Ito5]) 格子 $L \subset P$ に対して、無限級数 $J_{BC_n}(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}, \{\delta_k\}; L; z)$ が

$$\begin{aligned}
& C_{BC_n}(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}, \{\delta_k\}; L) \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha: \text{short}}} \frac{q^{\langle \frac{s-1}{2} - \sum_{i=1}^s \beta_i \rangle \langle \alpha, z \rangle} \vartheta(q^{\langle \alpha, z \rangle})}{\prod_{i=1}^s \vartheta(q^{\beta_i+\langle \alpha, z \rangle})} \\
& \cdot \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha: \text{middle}}} \frac{q^{\langle \frac{m-1}{2} - \sum_{j=1}^m \gamma_j \rangle \langle \alpha, z \rangle} \vartheta(q^{\langle \alpha, z \rangle})}{\prod_{j=1}^m \vartheta(q^{\gamma_j+\langle \alpha, z \rangle})} \cdot \prod_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha: \text{long}}} \frac{q^{\langle \frac{l-1}{2} - \sum_{k=1}^l \delta_k \rangle \langle \alpha, z \rangle} \vartheta(q^{\langle \alpha, z \rangle})}{\prod_{k=1}^l \vartheta(q^{\delta_k+\langle \alpha, z \rangle})}
\end{aligned}$$

の積表示を持つのは、以下の表のとき、またそのときに限る：

n	s	m	l	type
2	0	3	0	
2	2	2	0	
3	0	2	0	
n	0	1	1	Aomoto's C_n -type
n	4	1	0	van Diejen's BC_n -type
n	$2n+2$	0	0	Gustafson's C_n -type
n	$2n-2$	0	1	
n	$2n-6$	0	2	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
n	$2n+2-4m$	0	m	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
n	$4(\frac{n+1}{2} - [\frac{n+1}{2}])$	0	$[\frac{n+1}{2}]$	n が奇数のとき定理 4.1 の表の一つ

($0 \leq m \leq [\frac{n+1}{2}]$, $[x]$ は x をこえない整数)

ただし $C_{BC_n}(\{\beta_i\}, \{\gamma_j\}, \{\delta_k\}; L)$ は $z \in E_{\mathbf{C}}$ によらない定数。

注意 5.2 特に上の表で $n=1$ のとき、Bailey の very-well-poised ${}_6\psi_6$ 公式になる。

注意 5.3 $(s, m, l) = (0, 1, 1), (4, 1, 0), (2n+2, 0, 0)$ の場合はそれぞれ Aomoto[Ao], van Diejen[D], Gustafson[Gu1] により研究されている。

参考文献

- [Ao] K. Aomoto, *On elliptic product formulas for Jackson integrals associated with reduced root systems*, J. Alg. Combi. **8** (1998), 115–126.
- [Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, Paris, 1969.
- [D] J. F. van Diejen, *On certain multiple Bailey, Rogers and Dougall type summation Formulas*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **33** (1997), 483–508.
- [DV] J. F. van Diejen and L. Vinet, *The quantum dynamics of the compactified trigonometric Ruijsenaars–Schneider model*, Comm. Math. Phys. **197** (1998), 33–74.
- [GR] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of mathematics and its application **35**, Cambridge University Press, 1990.
- [Gu1] R. A. Gustafson, *Some q -Beta and Mellin-Barnes integrals on compact Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Anal. **23** (1992), 552–561.
- [Gu2] ———, *Some q -Beta integrals on $SU(n)$ and $Sp(n)$ that generalize the Askey Wilson and Nasrallah-Rahman integral*, SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 441–449.
- [Gu3] ———, *A summation theorem for hypergeometric series very-well-poised on G_2* , SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), 510–522.
- [Gu4] ———, *The Macdonald identities for affine root systems of classical type and hypergeometric series very-well-poised on semisimple Lie algebras*, Ramanujan International Symposium on Analysis (Pune, 1987), 185–224, Macmillan of India, New Delhi, 1989.
- [Ito1] M. Ito, *On a theta product formula for Jackson integrals associated with root system of rank two*, J. Math. Anal. Appli. **216** (1997), 122–163.
- [Ito2] ———, *Another proof of product formula for Gustafson’s G_2 -type sum*, Preprint, 1999.
- [Ito3] ———, *Symmetry classification for Jackson integral associated with irreducible reduced root systems*, Preprint, 1999.
- [Ito4] ———, *A product formula for Jackson integral associated with the root system F_4* , in preparation.
- [Ito4] ———, *Symmetry classification for Jackson integral associated with the root system BC_n* , in preparation.
- [Mi] S. C. Milne, *Basic hypergeometric series very well-poised in $U(n)$* , J. Math. Anal. Appli. **122** (1987), 223–256.
- [Ma1] I. G. Macdonald, *Some conjectures for root systems*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 998–1007.
- [Ma2] ———, *A formal identity for affine root systems*, Preprint, 1996.